Rappels de 5ème : Les fonctions et les équations/inéquations trigonométriques

Définitions

Dans le cadre de ce chapitre, nous travaillerons avec des ensembles de nombres réels.

Définition: *Une relation entre deux ensembles de réels est un lien entre deux nombres : un de l'ensemble de départ et un de l'ensemble d'arrivée.*
Une fonction est une relation entre deux ensembles qui associent à tout élément de l'ensemble de départ au plus un élément de l'ensemble d'arrivée.

Caractéristiques des fonctions

Domaine de définition

Définition: *Le domaine de définition d'une fonction est l'ensemble des valeurs de l'ensemble de départ (x) qui ont une image (y) par la fonction.*

Image d'une fonction

Définition: *L'ensemble image d'une fonction est l'ensemble des valeurs prises par la fonction.*

Zéros d'une fonction

Définition: *Le(s) zéro(s) d'une fonction est (sont) la (les) valeur(s) de x qui annulent la fonction.*

Parité

Définition: *Une fonction est paire si et seulement si* $\forall x \in dom f : f(-x) = f(x)$.
Une fonction est impaire si et seulement si $\forall x \in dom f : f(-x) = -f(x)$.
Dans tous les autres cas la fonction est quelconque.

Remarque: La parité traduit des symétries de la fonction. Si le domaine de la fonction n'est pas symétrique par rapport à 0, la fonction ne pourra être ni paire ni impaire. En effet, les valeurs rejetées éventuellement du domaine ne seront pas symétrique par rapport à $x = 0$ est le graphe de la fonction ne pourra donc jamais présenter de symétries.

Périodicité

Définition: *Une fonction est périodique si* $\forall x \in dom f, \exists T \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x)$.

Asymptotes

Définition

Définition: *Une droite asymptote (ou plus simplement asymptote) à une courbe est une droite telle que, lorsque l'abscisse ou l'ordonnée d'un point de la courbe tend vers l'infini, la distance de la courbe à la droite tend vers 0*[a].

a. Le calcul des asymptote est donc intimement lié à celui des limites

On parle parfois de branche infinie ou de comportement à l'infini de la fonction. Une asymptote est utilisée dans certaines sciences pour prédire le comportement à long terme d'une grandeur.

Point adhérent au domaine

Définition: *Le point a est adhérent à* dom_f *si tout intervalle centré en a possède un point dans* dom_f. *On a :*

$$\forall r \in \mathbb{R}_0^+ :]a-r, a+r[\cap dom_f \neq \phi$$

Asymptotes verticales

Définition: *La droite d'équation* $x = a$ *est une asymptote verticale (en abrégé AV) de la courbe d'équation* $y = f(x)$ *si et seulement si :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$$

Les points (valeurs de x) où la courbe est susceptible de présenter une AV sont les points adhérents au domaine de définition[a]

a. c'est-à-dire les valeurs "*ponctuelles*"(ne correspondant pas à un intervalle de valeurs) rejetées du domaine de définition de la fonction.

Asymptotes horizontales

Les asymptotes horizontales concernent l'étude du comportement à l'infini de la fonction, c'est-à-dire lorsque la variable x tend vers $\pm\infty$. Elle permet de prédire le comportement de la fonction en dehors de la zone représentée sur papier.

Définition: *La droite d'équation* $y = b$ *est une asymptote horizontale (en abrégé AH) de la courbe d'équation* $y = f(x)$ *si et seulement si :*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$$

Remarquons que, pour pouvoir déterminer une éventuelle asymptote horizontale, il faut que $\pm\infty$ appartiennent au domaine de définition de la fonction.

Asymptotes obliques

Les asymptotes obliques concernent l'étude du comportement à l'infini de la fonction, c'est-à-dire lorsque la variable x tend vers $\pm\infty$. Elle permet de prédire le comportement de la fonction en dehors de la zone représentée sur papier.

Définition: *Une asymptote oblique est une droite d'équation générale*

$$AO \equiv y = mx + p$$

où

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

et

$$p = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$$

Les relations permettant de calculer le coefficient angulaire et l'ordonnée à l'origine d'une asymptote oblique sont appelées les "formules de Cauchy"

Remarque concernant le calcul des asymptotes horizontales et obliques

Le calcul des asymptotes horizontales et obliques passe par des calcul de limites en $\pm\infty$ et amène parfois à devoir lever des indéterminations du type $\frac{\infty}{\infty}$.

D'après ce qui a été vu dans le cadre des cas d'indétermination [1], il ressort que :
- Si le degré du numérateur de la fonction et inférieur ou égale à celui du dénominateur la fonction admettra une asymptote horizontale ;
- Si le degré du numérateur est supérieur d'une unité au degré du dénominateur, la fonction admettra une asymptote oblique ;
- dans tous les autres cas, elle n'admettra aucune asymptote, ni horizontale, ni verticale.

Dans le cas de calcul de limites en $\pm\infty$ amenant à des indéterminations du type $\infty - \infty$, la conclusion est moins évidente à tirer.

De plus, et uniquement dans le cas de fonctions rationnelles, le calcul de l'asymptote peut se faire à l'aide de la division euclidienne. Cette technique est beaucoup plus rapide que l'application des formules et permet en outre d'obtenir des informations complémentaires concernant la position de la courbe par rapport aux asymptotes (voir à ce sujet le paragraphe)

Position d'une courbe par rapport à une asymptote

Afin de pouvoir dessiner complètement le graphe d'une fonction, il est encore important de connaitre la position de la courbe par rapport aux asymptotes.
L'étude de cette position consiste à dire
- si la courbe représentative de la fonction tend vers $\pm\infty$ l'infini au voisinage d'une asymptote verticale ;
- si la courbe représentative de la fonction est située au-dessus ou sous les asymptotes horizontales et/ou obliques.

La position de la courbe par rapport à une asymptote verticale s'effectue à l'aide d'un simple tableau de signe de la fonction autour de $x = a$ [2].

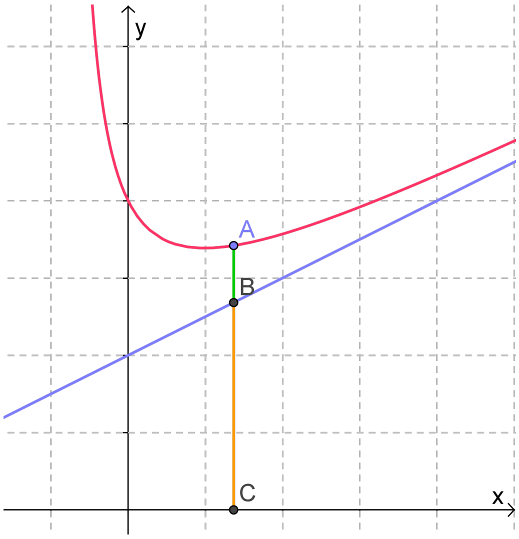
L'étude de la position de la courbe par rapport aux asymptotes horizontales et obliques passe par le calcul du signe de la distance entre la courbe et l'asymptote.

1. Voir cours de 5$^{\text{ème}}$
2. point où il y a une asymptote verticale

Définissons cette distance par :

$$d(x) = f(x) - y_{\text{asymptote}}$$

comme le montre la figure suivante.



Sur cette figure $[AB]$ représente la distance $d(x)$ au point x_A (soit $d(x_A)$), $[AC]$ la valeur de la fonction $f(x)$ en $x = x_A$ et $[BC]$ le $y_{\text{asymptote}}$ au même point.

Si cette distance est positive, la fonction est située au dessus de l'asymptote. Si elle est négative, elle est sous l'asymptote.

Croissance, décroissance, maximum, minimum d'une fonction

Définitions

Soit une fonction $f(x)$ et un intervalle $[a, b]$ du domaine de définition.

Définitions:

- *Une fonction est croissante sur l'intervalle* $[a, b]$ *si et seulement si* $\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_2 \geq x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$.
- *Une fonction est décroissante sur l'intervalle* $[a, b]$ *si et seulement si* $\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_2 \geq x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$.
- *Une fonction passe par un maximum sur l'intervalle* $[a, b]$ *lorsqu'elle cesse de croître pour commencer à décroître.*
- *Une fonction passe par un minimum sur l'intervalle* $[a, b]$ *lorsqu'elle cesse de décroître pour commencer à croître.*

Remarque : Un minimum (maximum) n'est pas nécessairement le point le plus bas (haut) de la fonction. Il s'agit d'une notion "*locale*"

Formules de dérivation

Formules générales

$$(f(x) \pm g(x))' = f(x)' \pm g(x)'$$
$$(f(x).g(x))' = f(x)'g(x) + f(x)g(x)'$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f(x)'g(x) - f(x)g(x)'}{g(x)^2}$$
$$(kf(x))' = kf(x)'$$

Formules particulières

$$(k)' = 0$$
$$(x)' = 1$$
$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (f(x)^n)' = nf(x)^{n-1}f(x)'$$
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f(x)'}{2\sqrt{f(x)}}$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f(x)'}{f^2(x)}$$

Lien entre dérivée première et croissance

Une fonction $f(x)$ est croissante si sa dérivée première est positive ; elle est décroissante si sa dérivée première est négative.

Une courbe représentative d'une fonction présente un extremum en un point si, en ce point, la dérivée première de cette fonction s'annule **et** change de signe.

Concavité

Une fonction tourne sa concavité vers le haut si sa dérivée seconde est positive. Elle tourne sa concavité vers le bas si sa dérivée seconde est négative.

Une courbe représentative d'une fonction admet un point d'inflexion en I si et seulement si
- cette courbe admet une tangente en ce point
- la concavité de cette courbe change de sens en ce point (c'est-à-dire que la dérivée seconde) s'annule **et** change de signe).

Cas particuliers

Point anguleux

Une fonction présente un point anguleux lorsque sa dérivée première est discontinue (c'est-à-dire qu'elle change de signe sans s'annuler).

Point de rebroussement

Une fonction présente un point de rebroussement lorsqu'elle présente une tangente verticale (sa dérivée première est infinie) et que sa dérivée première change de signe sans s'annuler.
Si la dérivée première ne change pas de signe mais est infinie, la fonction présente simplement une tangente verticale.

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème: *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue, alors pour tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = u$.*

Cas particulier: *Théorème de Bolzano :*
Si $f(x)$ est une fonction définie sur $[a, b]$, dérivable et strictement monotone sur $[a, b]$ et si, de plus, $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe contraire, il existe un et un seul réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$. Dès lors l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution dans l'intervalle $]a, b[$.

Etudes de fonctions : Plan de travail

Nous adopterons le plan de travail suivant :
- Détermination du domaine de définition.
- Parité et périodicité.
- Etude de $f(x)$.
  - Zéros.
  - Intersection* avec l'axe des ordonnées Oy.
  - Signe.
- Recherche des équations des éventuelles asymptotes.
- Etude de $f'(x)$.
  - Zéros (qui permettent de déterminer les éventuels extremums).
  - Signe (qui permet de déterminer la croissance et la décroissance).
- Etude de $f''(x)$.
  - Zéros (qui permettent de déterminer les éventuels points d'inflexion et les équations de tangentes en ces points).
  - Signe (qui permet de déterminer la concavité de la courbe).
- Détermination de quelques points particuliers.
- Tableau récapitulatif.
  - 1re ligne : valeurs particulières de la variable par ordre croissant ;
  - 2e ligne : les zéros, les pôles et le signe de $f'(x)$;
  - 3e ligne : les zéros, les pôles et le signe de $f''(x)$;
  - 4e ligne : croissance et décroissance de $f(x)$;
  - 5e ligne : concavité.
- Esquisse du graphique[3].

3. Pour mémoire

Equations trigonométriques élémentaires

Toute équation trigonométrique, aussi complexe soit elle, se ramène toujours à la résolution d'une équation élémentaire. Ces équations sont étudiées ci-dessous.

Equation élémentaire du type $\sin x = a$

Dans l'équation

$$\sin x = a$$

x est l'inconnue et a un nombre réel tel que $-1 \leq a \leq 1$.
Résoudre cette équation revient à rechercher les valeurs de l'angle x dont le sinus est égal à une valeur connue (a).
Les solutions de cette équations sonbt donc :

$$\sin \alpha = a \Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1} a$$

Les solutions de l'équation sont donc

$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Equation élémentaire du type $\cos x = b$

Dans l'équation

$$\cos x = b$$

x est l'inconnue et b un nombre réel tel que $-1 \leq b \leq 1$.
Résoudre cette équation revient à rechercher les valeurs de l'angle x dont le cosinus est égal à une valeur connue (b).

Les solutions de l'équation sont donc

$$\cos x = \cos b \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta + 2k\pi \\ x = -\beta + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Equation élémentaire du type $\tan x = c$

Dans l'équation

$$\tan x = c$$

x est l'inconnue et c un nombre réel connu.
Remarquons que, dans le cas des équations du type $\tan x = c$, il faut imposer que

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Résoudre cette équation revient à rechercher les valeurs de l'angle x dont la tangente est égale à une valeur connue (c).

Les solutions de l'équation sont donc

$$\tan x = c \Leftrightarrow x = \gamma + k\pi \;\; k \in \mathbb{Z}$$

Equations trigonométriques quelconques

Equations générales

La plupart des équations trigonométriques ne sont pas élémentaires. Cependant, par quelques modifications souvent simples, il est possible de s'y ramener.
On essayera de transformer l'équation en une autre ne contenant plus qu'***un seul nombre trigonométrique d'un seul angle inconnu***. En prenant ce nombre trigonométrique comme inconnue auxiliaire, on obtient une ***équation algébrique*** à une inconnue.
On veillera en outre à discuter les solutions en fonction des limites entre lesquelles peuvent varier les nombres trigonométriques.
Pour résoudre une équation trigonométrique quelconque, on pourra utiliser :

1. Les relations trigonométriques fondamentales :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

2. Les angles associés

Angles supplémentaires	*Angles anti-supplémentaires*
$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$
$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot\alpha$

Angles opposés	*Angles complémentaires*
$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$

3. Les formules de transformation

   (a) *Formules d'addition*

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

(b) *Formules de duplication*

$$\begin{aligned}
\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\
\cos 2a &= 2\cos^2 a - 1 \\
\cos 2a &= 1 - 2\sin^2 a \\
\sin 2a &= 2\sin a \cos a \\
\tan 2a &= \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}
\end{aligned}$$

(c) *Formules de Simpson*

$$\begin{aligned}
\sin p + \sin q &= 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\
\sin p - \sin q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \\
\cos p + \cos q &= 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \\
\cos p - \cos q &= -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}
\end{aligned}$$

(d) *Formules de Carnot*

$$\begin{aligned}
\cos^2 a &= \frac{1+\cos 2a}{2} \\
\sin^2 a &= \frac{1-\cos 2a}{2}
\end{aligned}$$

4. Les techniques classiques de factorisation (mise en évidence, équation du second degré, produits remarquables,...)

Ces techniques permettent en général de transformer l'équation initiale en équation produit du type :

$$A(x).B(x) = 0$$

où $A(x)$ et $B(x)$ sont des équations trigonométriques élémentaires du style de celles exposées au paragraphe .

Remarque importante: On n'oubliera jamais de poser les conditions d'existence et de simplification de l'équation sous peine d'obtenir des solutions inacceptables.

Equation en $\sin x$ et $\cos x$

1. Si l'équation ne contient que des puissances paires de $\sin x$ et $\cos x$, on utilise la relation fondamentale de la trigonométrie : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ pour remplacer $\sin x$ par $\cos x$ ou vice-versa.
2. Si l'équation est homogène en $\sin x$ et $\cos x$, c'est-à-dire qu'elle comporte des termes en $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ ***et*** $\sin x \cos x$, il suffit de diviser les deux membres de l'équation par $\cos^2 x$ et de passer à l'inconnue auxiliaire $\tan x$ [4].
   Attention, dans ce cas, il faut imposer $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour que l'équation continue d'exister.

4. en utilisant le fait que $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ et $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Equation du type $a \cos x + b \sin x = c$

Dans cette équation, a et b sont des réels non nuls.
Puisque $a \neq 0$, on peut diviser les deux membres de l'équation par a. L'équation devient

$$\cos x + \frac{b}{a} \sin x = \frac{c}{a}$$

Ou encore, en posant $\frac{b}{a} = \tan \phi$:

$$\begin{aligned} \cos x + \tan \phi \sin x &= \frac{c}{a} \\ \Leftrightarrow \cos x + \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \sin x &= \frac{c}{a} \\ \Leftrightarrow \cos \phi \cos x + \sin \phi \sin x &= \frac{c}{a} \cos \phi \end{aligned}$$

Finalement, on peut écrire à l'aide des formules d'addition :

$$\cos(x - \phi) = \frac{c}{a} \cos \phi$$

Cette relation est valable pour autant que

$$\left| \frac{c}{a} \cos \phi \right| \leq 1$$

ou encore, après élévation au carré

$$c^2 \leq a^2 + b^2$$

L'équation devient donc une équation fondamentale (ϕ est connu) dont la solution est

$$\left\{ \begin{array}{l} x - \phi = \cos^{-1}\left(\dfrac{c \cos \phi}{a}\right) + 2k\pi \\ x - \phi = -\cos^{-1}\left(\dfrac{c \cos \phi}{a}\right) + 2k\pi \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

ou encore

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \cos^{-1}\left(\dfrac{c \cos \phi}{a}\right) + \phi + 2k\pi \\ x = -\cos^{-1}\left(\dfrac{c \cos \phi}{a}\right) + \phi + 2k\pi \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

Inéquations trigonométriques

Le résolution d'inéquations trigonométriques est quelque peu plus complexe que celle des inéquations algébriques. En effet, l'existence de racines multiples d'une fonction trigonométrique complique la construction du tableau de signe lié à l'inéquation. Cependant, le cercle trigonométrique permet de réduire ce problème.

Depuis la 4ème, on sait que tous les angles sont donnés à 2π près. Dès lors, on est souvent amené à travailler en *valeur principale* des angles, c'est-à-dire les valeurs d'angles comprises dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ ou, pour des raisons qui apparaitront dans le cadre de l'étude des fonctions trigonométriques[5] dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$. Dès lors toutes les solutions des inéquations trigonométriques seront toujours précisées dans ce dernier intervalle.

5. Voir cours d'analyse de 6ème