FICHE SAVOIR FAIRE :
Division euclidienne de polynômes

Méthode

La division d'un polynôme $P(x)$ (dividende) par un polynôme $D(x)$ (diviseur) donne un polynôme $Q(x)$ (quotient) et un polynôme $R(x)$ (reste) liés par les relations :

$$P(x) = D(x).Q(x) + R(x)$$

où le degré de $R(x)$est inférieur au degré de $D(x)$ Pour faire une division euclidienne, on réalise un tableau comme pour une division de nombres réels :

$$\begin{array}{c|l} P(x) & D(x) \\ \cline{2-2} \vdots & Q(x) \\ \vdots & \\ \cline{1-1} R(x) & \end{array}$$

Cette division s'arrête lorsque le degré de $R(x)$ est strictement inférieur au degré de $D(x)$.

Exemple

Divisons le polynôme $6x^4 - 2x^3 - 2x - 2$ par le polynôme $x^2 + 2$.

- La première étape consiste (comme pour la division de nombres) à diviser terme de plus haut degré du dividende par le premier terme du diviseur. On a :

$$\frac{6x^4}{x^2} = 6x^2$$

On écrit ce résultat sous le diviseur.

$$\begin{array}{ccccc|l} 6x^4 & -2x^3 & & -2x & -2 & x^2+2 \\ \cline{6-6} & & & & & 6x^2 \\ & & & & & \\ & & & & & \end{array}$$

- On effectue la multiplication de ce facteur par le diviseur et on recopie le résultat de ce produit sous les puissance correspondante du dividende. On soustrait les deux premières lignes de la partie gauche du tableau. On obtient ce que l'on appelle un "***reste partiel***"

$$\begin{array}{ccccc|l} 6x^4 & -2x^3 & & -2x & -2 & x^2+2 \\ \cline{6-6} 6x^4 & & +12x^2 & & & 6x^2 \\ \cline{1-3} & -2x^3 & -12x^2 & & & \\ & & & & & \end{array}$$

Exemple

– On recommence le processus avec le reste partiel (on divise le terme de plus haut degré du reste partiel par le terme de plus haut degré du diviseur).

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -2x^3 & & -2x & -2 & x^2+2 \\
\cline{6-6}
6x^4 & & +12x^2 & & & 6x^2-2x \\
\cline{1-3}
 & -2x^3 & -12x^2 & & & \\
 & -2x^3 & & -4x & & \\
\cline{2-4}
 & & -12x^2 & +4x & &
\end{array}
$$

– On continue jusque quand le degré du reste partiel est strictement inférieur au degré du diviseur.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6x^4 & -2x^3 & & -2x & -2 & x^2+2 \\
\cline{6-6}
6x^4 & & +12x^2 & & & 6x^2-2x-12 \\
\cline{1-3}
 & -2x^3 & -12x^2 & & & \\
 & -2x^3 & & -4x & & \\
\cline{2-4}
 & & -12x^2 & +2x & & \\
 & & -12x^2 & & -24 & \\
\cline{3-5}
 & & & 2x & +22 &
\end{array}
$$

On peut écrire

$$\frac{6x^4-2x^3-2x-2}{x^2+2} = 6x^2-2x+12+\frac{2x+22}{x^2+2}$$