Fiche savoir faire :

Limites

1$^{\text{er}}$ cas : Cas général

Méthode	On évalue la limite en utilisant la relation $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
Exemple	$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2+3x+2}{x-4} = \dfrac{2.2^2+3.2+2}{2-4} = \dfrac{16}{-2} = -8$

2$^{\text{ème}}$ cas : Forme indéterminée du type $\dfrac{0}{0}$

Méthode	La fonction ne contient que des fonctions rationnelles. Le numérateur et le dénominateur contiennent un facteur commun. On les factorise pour faire apparaitre le facteur commun. On simplifie le facteurs communs et on réévalue la limite.
Exemple	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} = \dfrac{0}{0}$ F.I.. Le numérateur et le dénominateur s'annulent pour $x=1$. Ils sont donc divisible par $(x-1)$ et donc factorisable : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-3}{x-2} = 2$
Méthode	La fonction contient des fonctions irrationnelles. On rationalise le numérateur et le dénominateur, pour faire disparaitre les racines et le facteur commun. On simplifie le facteurs communs et on réévalue la limite.
Exemple	$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-3}} = \dfrac{0}{0}$ F.I. On rationnalise le numérateur **et** le dénominateur. On a : $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-3}} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x-3}} \left(\dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3}}\right) \left(\dfrac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}\right)$ et, après simplifications : $= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+1-4}{x-3} \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+1}+2} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+1}+2} = 0$

3$^{\text{ème}}$ cas : Forme indéterminée du type $\dfrac{\infty}{\infty}$

Méthode	La fonction ne contient que des fonctions rationnelles. On ne garde que les termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur. On simplifie la fonction obtenue et on réévalue la limite.
Exemple	Calculer $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2+3x+2}$. On obtient : $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-1}{2x^2+3x+2} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$ En ne gardant que es termes de plus haut degré, la limite devient : $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
Méthode	La fonction contient des fonctions irrationnelles. On ne garde que les termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur. On simplifie la fonction obtenue en n'oubliant pas que $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert = \begin{cases} x \text{ si } x \leq 0 \\ -x \text{ si } x < 0 \end{cases}$ et on réévalue la limite.
Exemple	$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4x-1}{\sqrt{x^2+5x+3}}$. On obtient : $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x-1}{\sqrt{x^2+5x+3}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$ En ne gardant que les termes de plus haut degré, on obtient : $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x}{\lvert x \rvert}$$ On doit scinder la limite en deux parties. On a : $$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{x} = 4$$ et $$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x}{-x} = -4$$

4$^{\text{ème}}$ cas : Forme indéterminée du type $\infty - \infty$

Méthode

La fonction contient nécessairement des fonctions irrationnelles. On rationalise la fonction et on la simplifie. On aboutit nécessairement à une forma indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. On ne garde que les termes de plus haut degré au numérateur et au dénominateur. On simplifie la fonction obtenue et on réévalue la limite.

Exemple

Calculer $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2x}\right]$. On a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2x}\right] = \infty - \infty \quad \text{F.I.}$$

En rationalisant cette expression, on obtient :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left[\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2x}\right] . \left[\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2x}\right]}{\left[\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2x}\right]}$$

En simplifiant :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^2+1)-(x^2+2x)}{\left[\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2x}\right]} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-2x}{\left[\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2x}\right]}$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

On a :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-2x}{\left[\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+2x}\right]}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}}$$

En divisant la limite en deux :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x+x} = -1$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{-x-x} = 1$$

5$^{\text{ème}}$ cas : Forme indéterminée du type $0.\infty$

Méthode

Ces cas se ramène à des cas du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Il suffit de remarquer que n'importe quelle fonction f peut s'écrire sous la forme $\frac{1}{\frac{1}{f}}$.

On applique dans ce cas-là la règle de l'Hospital : si $f(x)$ et $g(x)$ tendent toutes les deux vers 0 en a, ou vers $\pm\infty$, et si le rapport

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

admet une limite finie ou égale à $\pm\infty$ en a ou en $\pm\infty$, alors :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

et

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Cette règle peut s'appliquer bien sûr également pour les formes indéterminées du style $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemple

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x\right] = 0.\infty \text{ F.I.}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{\tan x}} = \frac{0}{0} \text{ F.I.}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)'}{\left(\frac{1}{\tan x}\right)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\frac{-1}{\tan^2 x\cos^2 x}}$$

$$= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan^2 x\cos^2 x = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sin^2 x = -1$$