

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°10 - Solutions

Les asymptotes

Série A

Le 21 mai 2026

Classe: 5B

.../8 1. On donne la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x - 1$. Déterminer les équations des asymptotes de $f(x)$.

- $\text{dom}_f = \mathbb{R}$. Il n'y a donc pas d'AV.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty - \infty$ F.I.

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + 1} - (x + 1)] [\sqrt{x^2 + 1} + (x + 1)]}{[\sqrt{x^2 + 1} + (x + 1)]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 - 2x - 1}{[\sqrt{x^2 + 1} + (x + 1)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{[\sqrt{x^2 + 1} + (x + 1)]} = \frac{\infty}{\infty} \text{ F.I.} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{[\sqrt{x^2} + x]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{[|x| + x]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{[x + x]} = -1 \end{aligned}$$

Il y a donc une $\text{AH}_d \equiv y = -1$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. Il n'y a donc pas d' AH_g . Cherchons l'AO.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ F.I.} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - x}{x} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 1} + x - 1] = \infty - \infty \text{ F.I.} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[\sqrt{x^2 + 1} + (x - 1)] [\sqrt{x^2 + 1} - (x - 1)]}{[\sqrt{x^2 + 1} - (x - 1)]} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + 2x - 1}{[\sqrt{x^2 + 1} - (x - 1)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{[\sqrt{x^2 + 1} - (x - 1)]} = \frac{\infty}{\infty} \text{ F.I.} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{[\sqrt{x^2} - x]} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{[|x| - x]} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{[-x - x]} = -1 \end{aligned}$$

Il y a donc une $\text{AO}_g \equiv y = -2x - 1$.

2. On donne la fonction $g(x) = \frac{x^2}{x-1} - |x|$.

.../6

(a) Déterminer l'équation des asymptotes de $g(x)$.

- $dom_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{0} - 1 = \pm\infty$. Il y a donc une AV $\equiv x = 1$.

•

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

Il y a donc une AH_d $\equiv y = 1$

•

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2}{x-1} + x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x} = -\infty$$

Il n'y a donc pas d'AH_g. Cherchons l'AO. La division euclidienne permet d'écrire la fonction sous la forme

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

Comme $\frac{1}{x-1}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $-\infty$, la fonction tend vers la droite d'équation $y = 2x + 1$ qui est donc l'AO de la fonction. On a donc AO_g $\equiv y = 2x + 1$.

.../6

(b) Etudier la position relative de la courbe par rapport aux asymptotes.

Pour l'asymptote verticale, il faut étudier le signe de la fonction autour de $x = 1$. Puisque x est positif, la fonction s'écrit

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

Le tableau de signe de cette fonction est :

x	0		1	
x	0	+		+
$x-1$		-	0	+
$f(x)$	0	-	$-\infty$	$+\infty$
				+

On a donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

Pour l'asymptote horizontale, on calcul la distance entre la courbe et l'asymptote par :

$$d(x) = \frac{x}{x-1} - 1 \Leftrightarrow d(x) = \frac{1}{x-1}$$

qui est positive (puisque x est positif). La courbe est donc située au-dessus de l'asymptote.

Dans l'écriture de la fonction sous la forme

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

le terme $\frac{1}{x-1}$ représente la distance entre la courbe et l'asymptote. Comme x est négatif, cette distance est négative et la fonction est située sous l'asymptote oblique.

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°10 - Solutions

Les asymptotes

Série B

Le 21 mai 2026

Classe: 5B

1. On donne la fonction $f(x) = \frac{x^2}{x+1} + |x|$.

.../6

(a) Déterminer l'équation des asymptotes de $f(x)$.

- $dom_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{1}{0} + 1 = \pm\infty$. Il y a donc une AV $\equiv x = -1$.

-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{x+1} + x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = +\infty$$

Il n'y a donc pas d'AH_d. Cherchons l'AO. La division euclidienne permet d'écrire la fonction sous la forme

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

Comme $\frac{1}{x+1}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, la fonction tend vers la droite d'équation $y = 2x - 1$ qui est donc l'AO de la fonction. On a donc AO_d $\equiv y = 2x - 1$.

-

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2}{x+1} - x \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

Il y a donc une AH_g $\equiv y = -1$

.../6

- (b) Etudier la position relative de la courbe par rapport aux asymptotes.

Pour l'asymptote verticale, il faut étudier le signe de la fonction autour de $x = -1$.
Puisque x est négatif, la fonction s'écrit

$$f(x) = \frac{-x}{x+1}$$

Le tableau de signe de cette fonction est :

x	-1		0
$-x$	+		+
$x+1$	-	0	+
$f(x)$	-	$-\infty$	$+\infty$

On a donc $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$.

Dans l'écriture de la fonction sous la forme

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

le terme $\frac{1}{x+1}$ représente la distance entre la courbe et l'asymptote. Comme x est positif, cette distance est positive et la fonction est située au-dessus de l'asymptote oblique.

Pour l'asymptote horizontale, on calcul la distance entre la courbe et l'asymptote par :

$$d(x) = \frac{-x}{x+1} + 1 \Leftrightarrow d(x) = \frac{1}{x-1}$$

qui est négative (puisque x est négatif). La courbe est donc située sous l'asymptote.

.../8

2. On donne la fonction $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x - 1$. Déterminer les équations des asymptotes de $g(x)$.

Voir série A, question 1