

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°12 - Solutions

Les asymptotes

Le 21 mai 2026

Classe: 5C

.../10 1. On donne la fonction $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - 2x - 3$.

(a) Etudier le signe de $f(x)$.

On a tout d'abord $\text{dom}_f : \mathbb{R}$.

Il faut trouver les zéros de $f(x)$. On a

$$\sqrt{4x^2 + 1} - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2 + 1} = 2x + 3 \quad \left(\text{CE} x \geq -\frac{3}{2} \right)$$

$$4x^2 + 1 = 4x^2 + 9 + 12x \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

Si $x < -\frac{2}{3}$, $x < 0$ et $f(x) > 0$.

Si $x > -\frac{2}{3}$, on ne peut pas déduire le signe de $f(x)$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{4x^2 + 1} - 2x - 3 = \frac{[\sqrt{4x^2 + 1} - (2x + 3)][\sqrt{4x^2 + 1} + (2x + 3)]}{[\sqrt{4x^2 + 1} + (2x + 3)]} \\ &= \frac{-12x - 8}{[\sqrt{4x^2 + 1} + (2x + 3)]} \end{aligned}$$

Le tableau de signe est :

x	$-\frac{2}{3}$
$-12x - 8$	0 -
$D(x)$	+
$f(x)$	0 -

Le tableau de signe de $f(x)$ est donc :

x	$-\frac{2}{3}$
$f(x)$	+ 0 -

- (b) Déterminer les équations des asymptotes de $f(x)$.

Vu le domaine, il n'y a pas d'AV.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty - \infty \text{ F.I.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{4x^2 + 1} - (2x + 3)] [\sqrt{4x^2 + 1} + (2x - 3)]}{[\sqrt{4x^2 + 1} + (2x + 3)]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-12x - 8}{[\sqrt{4x^2 + 1} + (2x + 3)]} = \frac{\infty}{\infty} \text{ F.I.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-12x}{[\sqrt{4x^2} + 2x]} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-12x}{4x} = -3$$

Il y a donc une AH en $+\infty$ d'équation $y = -3$. Il n'y a donc pas d'AO.

En $-\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$. Il n'y a pas d'AH.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ F.I.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - (2x + 3)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2} - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x| - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{x} = -4.$$

$$\text{De même, } p = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 4x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{4x^2 + 1} - (2x + 3) + 4x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{4x^2 + 1} + 2x - 3]$$

Un calcul similaire à celui effectué pour l'AH en $+\infty$ donne $p = -3$. L'AO a donc pour équation $y = -4x - 3$ en $-\infty$.

.../10 2. On donne la fonction $f(x) = \frac{x}{x-1} - |x+1|$

- (a) Déterminer les équations des éventuelles asymptotes de $f(x)$.

Le domaine de la fonction est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$. Il y a donc une AV d'équation $x = 1$.

Traduisons la fonction en enlevant les valeurs absolues :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} & \text{si } x < -1 \\ \frac{x^2 + x - 1}{1 - x} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Effectuons la division euclidienne. On peut écrire :

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 + \frac{1}{x-1} & \text{si } x < -1 \\ -x + \frac{1}{x-1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Dans la division, on constate que la deuxième partie (fraction) tend vers 0 si x tend vers $\pm\infty$. La fonction tend donc vers une fonction du premier degré. Or une asymptote (oblique ici) est une droite. Donc, il y a deux AO, une en $-\infty$ d'équation $y = x + 2$ et l'autre en $+\infty$ d'équation $y = -x$.

- (b) Etudier la position de la courbe par rapport à ces asymptotes.

Le tableau de signe de la fonction (TS d'une fonction rationnelle classique) est :

x	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$			-1	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$			1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$			
$\frac{x^2+x-1}{x-1}$	-	0	+									
$\frac{x^2+x-1}{1-x}$					+	0	-	$\neq$	+	0	-	
$f(x)$	-	0	+		+	0	-	$\neq$	+	0	-	

On a donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

Pour la position par rapport aux AO, il faut étudier le signe de $\frac{1}{x-1}$ (on a démontré dans le cours que la deuxième partie de la division euclidienne (fraction) représente l'expression de la distance entre la courbe et l'asymptote). Le TS est :

x	1	
$x-1$	-	+
	$f(x)$ sous l'AO	$f(x)$ au-dessus de l'AO