



Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°1 - Solutions

Rappels fonctions

Série A

Le 24 septembre 2026

Classe: 6B

1. On donne la fonction $f(x) = |x - 1| \sqrt[3]{x^2}$. Etablir le tableau de variations complet de $f(x)$.

Pour dériver la fonction, il faut d'abord traduire la valeur absolue. On a

$$f(x) = \begin{cases} (x - 1) \sqrt[3]{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ -(x - 1) \sqrt[3]{x^2} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Si l'on dérive la première forme de la fonction ($x \geq 1$), on a successivement:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[(x - 1) \sqrt[3]{x^2} \right]' \\ &= \sqrt[3]{x^2} + (x - 1) \left[x^{\frac{2}{3}} \right]' \\ &= \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3} (x - 1) x^{-\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3} (x - 1) \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \frac{3x + 2(x - 1)}{3\sqrt[3]{x}} \\ &= \frac{5x - 2}{3\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

On a donc:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{5x - 2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{x } x \geq 1 \\ -\frac{5x - 2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{x } x < 1 \end{cases}$$

Le tableau de variation est donc:

x	0	$\frac{2}{5}$	1	
$2x - 5$				+
$3\sqrt[3]{x}$	-	0	+	+
$-2x + 5$	+	+	0	-
$f(x)$	-	0	-	+
	$\searrow$	P.R.	$\nearrow$	M
		$\left(\frac{2}{5}, \frac{3\sqrt[3]{20}}{25} \right)$		
		(0,0)		
			$\searrow$	P.A.
				$\nearrow$
				(1,0)

2. On donne la fonction $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 10}{2x - 6}$.

(a) Etablir l'équation des asymptotes de $f(x)$;

Le domaine de définition de $f(x)$ est $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ et $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \pm\infty$. Il y a donc une asymptote verticale d'équation $AV \equiv x = 3$.

Comme la fonction est rationnelle, la division euclidienne permet d'écrire la fonction sous la forme $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{2}{x-3}$.

Le troisième terme de ce développement tendant vers 0 si x tend vers $\pm\infty$, on peut affirmer que la fonction tend vers $\frac{1}{2}x - 1$ si x tend vers $\pm\infty$ et que c'est l'équation d'une droite. On a donc une asymptote oblique d'équation $AO \equiv y = \frac{1}{2}x - 1$.

(b) Etudier la position relative de la courbe représentative de $f(x)$ par rapport aux asymptotes;

Le tableau de signe de la fonction est:

x	3		
$x^2 - 5x + 10$	+		+
$2x - 6$	-	0	+
$f(x)$	-	$\nexists$	+

et $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$.

Pour l'asymptote oblique, la distance est donnée par $d(x) = \frac{2}{x-3}$ (cf division euclidienne). En $-\infty$ cette distance est négative et la courbe est sous l'asymptote. La conclusion est inverse en $+\infty$.

(c) Etablir le tableau récapitulatif complet du comportement de la fonction;

On a:

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{2(x-3)^2} \\ f''(x) = \frac{4}{(x-3)^3} \end{cases}$$

Le tableau récapitulatif du comportement de la fonction est donc:

x	1		3		5	
$f'(x)$	+	0	-	$\nexists$	-	0
$f''(x)$	-		-	$\nexists$	+	
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	AV	$\searrow$	m
	$\cap$	$\left(1, -\frac{3}{2}\right)$	$\cap$		$\cup$	$\left(5, \frac{5}{2}\right)$

(d) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction en son point d'abscisse 2.

On a $f(2) = -2$ et $f'(2) = -\frac{3}{2}$. Dès lors $t \equiv y + 2 = -\frac{3}{2}(x - 2)$ ou, après simplification:

$$t \equiv y = -\frac{3}{2}x + 1$$



Athénée Royal Uccle 1

Nom, Prénom:

Devoir surveillé n°1 - Solutions

Rappels fonctions

Série B

Le 24 septembre 2026

Classe: 6B

1. On donne la fonction $f(x) = |x + 1| \sqrt[3]{x^2}$. Etablir le tableau de variations complet de $f(x)$.

Pour dériver la fonction, il faut d'abord traduire la valeur absolue. On a

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)\sqrt[3]{x^2} & \text{si } x \geq -1 \\ -(x+1)\sqrt[3]{x^2} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Si l'on dérive la première forme de la fonction ($x \geq -1$), on a successivement:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[(x+1)\sqrt[3]{x^2} \right]' \\ &= \sqrt[3]{x^2} + (x+1) \left[x^{\frac{2}{3}} \right]' \\ &= \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}(x+1)x^{-\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}(x+1)\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \\ &= \frac{3x + 2(x+1)}{3\sqrt[3]{x}} \\ &= \frac{5x + 2}{3\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

On a donc:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{5x + 2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x \geq -1 \\ -\frac{5x + 2}{3\sqrt[3]{x}} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

Le tableau de variation est donc:

x	-1	$-\frac{2}{5}$	0	
$2x + 5$		-	0	+
$3\sqrt[3]{x}$	-	-	-	0
$-2x - 5$	+			
$f(x)$	-	+	0	-
	$\searrow$	P.A.	$\nearrow$	M
		(-1,0)	$\left(-\frac{2}{5}, \frac{3\sqrt[3]{20}}{25}\right)$	$\searrow$
				P.R.
				(0,0)
				$\nearrow$

2. On donne la fonction $f(x) = \frac{-x^2 - 5x - 10}{6 + 2x}$.

(a) Etablir l'équation des asymptotes de $f(x)$;

Le domaine de définition de $f(x)$ est $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ et $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \pm\infty$. Il y a donc une asymptote verticale d'équation $AV \equiv x = -3$.

Comme la fonction est rationnelle, la division euclidienne permet d'écrire la fonction sous la forme $f(x) = -\frac{1}{2}x - 1 - \frac{2}{x+3}$.

Le troisième terme de ce développement tendant vers 0 si x tend vers $\pm\infty$, on peut affirmer que la fonction tend vers $-\frac{1}{2}x - 1$ si x tend vers $\pm\infty$ et que c'est l'équation d'une droite. On a donc une asymptote oblique d'équation $AO \equiv y = -\frac{1}{2}x - 1$.

(b) Etudier la position relative de la courbe représentative de $f(x)$ par rapport aux asymptotes;

Le tableau de signe de la fonction est:

x	-3		
$-x^2 - 5x - 10$	-	-	-
$2x + 6$	-	0	+
$f(x)$	+	$\nexists$	-

et $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$.

Pour l'asymptote oblique, la distance est donnée par $d(x) = -\frac{2}{x+3}$ (cf division euclidienne). En $-\infty$ cette distance est positive et la courbe est au-dessus l'asymptote. La conclusion est inverse en $+\infty$.

(c) Etablir le tableau récapitulatif complet du comportement de la fonction;

On a:

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{-x^2 - 6x - 5}{2(x+3)^2} \\ f''(x) = \frac{-4}{(x+3)^3} \end{cases}$$

Le tableau récapitulatif du comportement de la fonction est donc:

x	-5		-3	-1	
$f'(x)$	-	0	$\nexists$	+	0
$f''(x)$	+		$\nexists$	-	
$f(x)$	$\searrow$	m	$\nearrow$	AV	$\nearrow$
	$\cup$	$\left(-5, \frac{5}{2}\right)$	$\cup$	$\cap$	$\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$
					$\cap$

(d) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction en son point d'abscisse -2;

On a $f(-2) = -2$ et $f'(-2) = \frac{3}{2}$. Dès lors $t \equiv y + 2 = \frac{3}{2}(x + 2)$ ou, après simplification:

$$t \equiv y = \frac{3}{2}x + 1$$